1) (Pour F non vide, le cas F vide étant évident).
Soit x et x' dans X. Alors pour tout y dans F :

$$d(x,F) \leq d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y)$$

et donc :

$$d(x,F) \leq d(x,x') + d(x',y)$$

Prenons l'Inf sur y dans cette inégalité, on obtient :

$$d(x,F) \leq d(x,x') + d(x',F) \ \ (*)$$

qu'on peut regrouper en :

$$g_F(x) - g_F(x') \leq d(x,x').$$

En échangeant les rôles de x et x' on majore la valeur absolue de $g_F(x) - g_F(x')$ et on conclut que g_F est 1-lipschitzienne.
2) (Pour F non vide, le cas F vide étant évident).
Soit $x \in X$. Alors :
$d(x,F) = 0 \iff \operatorname{Inf}_{y\in F} d(x,y) = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists y \in F, d(x,y) < \epsilon \iff \forall \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap F \neq \emptyset \iff x \in \overline{F} \iff x \in F$.
3)a) Soit trois points x, x' et x'' dans X/F on se propose de montrer l'inégalité :

$$\delta(x,x'') \leq \delta(x,x') + \delta(x',x'').$$

Les cas où deux de ces points sont égaux à ω sont évidents, trois cas nécessitent un peu d'attention :
* le cas où x et x'' sont dans $X \setminus F$, x' valant ω
Il est quasiment évident, puisqu'alors $\delta(x,x'')$ est par définition le Min de deux réels dont l'un est $\delta(x,x') + \delta(x',x'')$: il est donc plus petit que ce dernier.
* le cas où $x'' = \omega$ tandis que x et x' sont dans $X \setminus F$ (et bien sûr symétriquement le cas où $x = \omega$ tandis que x' et x'' sont dans $X \setminus F$).
On écrit les deux inégalités :

$$\begin{array}{llll} \delta(x,x'') = d(x,F) \leq & d(x,x') & +d(x',F) & \text{(c'est (*) de la question 1)} \\ \delta(x,x'') = d(x,F) \leq & d(x,F) + d(x',F) & +d(x',F) & \text{(évidente)} \end{array}$$

et on prend le Min sur les deux membres de droite : on obtient l'inégalité triangulaire souhaitée.
* le cas où les trois points x, x' et x'' sont tous distincts de ω.
On va alors accumuler quatre inégalités :

$$\begin{array}{lllll} \delta(x,x'') \leq & d(x,x'') & \leq d(x,x') & +d(x',x'') & \text{(inég. triangulaire pour } d) \\ \delta(x,x'') \leq & d(x,F) + d(x'',F) & \leq d(x,F) + d(x',F) & +d(x',x'') & \text{(utiliser (*) pour } x' \text{ et } x'') \\ \delta(x,x'') \leq & d(x,F) + d(x'',F) & \leq d(x,x') & +d(x',F) + d(x'',F) & \text{(utiliser (*) pour } x \text{ et } x') \\ \delta(x,x'') \leq & d(x,F) + d(x'',F) & \leq d(x,F) + d(x',F) & +d(x',F) + d(x'',F) & \text{(évident !)} \end{array}$$

On prend le Min sur ces quatre inégalités et on a gagné.
b) Question sans problème, inutile d'en écrire le corrigé.
4) Soit (x_n) une suite dans X/F. On distingue deux cas :
* un cas est très facile : si la suite (x_n) prend une infinité de fois la valeur ω, il est immédiat qu'on peut en extraire une sous-suite (constante) tendant vers ω.
* le cas sérieux est celui où (x_n) ne prend la valeur ω qu'un nombre fini de fois. Quitte à modifier ses premiers termes, on peut dès lors la supposer à valeurs dans $X \setminus F$.
L'espace X étant compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_\varphi(n))$ convergente vers une limite $l \in X$. On notera pour alléger la lecture $y_n = x_\varphi(n)$. Deux sous-cas apparaissent alors :

** Si $l \notin F$, on dispose alors de l'inégalité suivante, valable pour tout n et résultant de la définition de δ :

$$\delta(y_n, l) \leq d(y_n, l).$$

La convergence de (y_n) vers l dans (X, d) entraîne donc la convergence de (y_n) vers l dans $(X/F, \delta)$.
** Si $l \in F$, il faut penser à changer son fusil d'épaule et chercher à vérifier que $y_n \to \omega$ quand $n \to +\infty$ dans l'espace métrique $(X/F, \delta)$. Ceci est à peu près clair vu la majoration évidente :

$$\delta(y_n, \omega) = d(y_n, F) \leq d(y_n, l).$$

Dans les deux sous-cas on a donc su prouver la convergence de (y_n) dans l'espace X/F ; la suite (x_n) possède donc bien une sous-suite convergente dans cet espace.
5) a) Notons $\alpha = d(x_0, F)$. Comme $x_0 \notin F$, $\alpha > 0$.
Soit maintenant $\epsilon > 0$. Par continuité de f il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de X, si $d(x, x_0) \leq \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.
Posons $\tilde{\eta} = \mathrm{Min}(\eta, \frac{\alpha}{2})$. Soit $x \in X/F$ tel que $\delta(x, x_0) \leq \tilde{\eta}$.
Cette inégalité montre dans un premier temps que $x \neq \omega$, puisque $\delta(\omega, x_0) = \alpha$ est strictement plus grand que $\tilde{\eta}$, contrairement à $\delta(x, x_0)$. Le point x est donc un élément de X/F, et $\delta(x, x_0) = \mathrm{Min}(d(x, x_0), d(x, F) + d(x_0, F))$.
Notons que $\tilde{\eta} < \alpha = d(x_0, F) \leq d(x, F) + d(x_0, F)$, alors que $\delta(x, x_0) \leq \tilde{\eta}$: il est donc exclu que $\delta(x, x_0) = d(x, F) + d(x_0, F)$, et en relisant la définition de $\delta(x, x_0)$, on obtient $\delta(x, x_0) = d(x, x_0)$. Mais alors l'hypothèse $\delta(x, x_0) \leq \tilde{\eta}$ se réécrit $d(x, x_0) \leq \tilde{\eta}$ où par construction $\tilde{\eta} \leq \eta$. Elle permet donc de conclure que $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$, qui se réécrit $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| \leq \epsilon$: la continuité de $\tilde{f}$ en x_0 est ainsi prouvée.
b) On va montrer que pour toute suite (x_n) tendant vers ω dans X/F, $\tilde{f}(x_n) \to 0 = \tilde{f}(\omega)$ quand $n \to +\infty$. Il est facile de voir qu'on peut supposer sans mal que tous les x_n sont distincts de ω, donc sont des éléments de $X \setminus F$. Il est donc possible de considérer (x_n) comme une suite dans l'expace compact (X, d), et d'écrire $f(x_n)$ au lieu de $\tilde{f}(x_n)$. La suite $(f(x_n))$ évolue dans la partie compacte $f(X) \subset \mathbf{R}$; pour montrer qu'elle tend vers 0 il suffit de montrer qu'elle ne peut avoir de valeur d'adhérence a non nulle.
Soit donc a une valeur d'adhérence dans $\mathbf{R}$ de la suite $(f(x_n))$ et $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) telle que $f(x_{\varphi(n)}) \to \alpha$ quand $n \to \infty$. Notons pour alléger $y_n = x_{\varphi(n)}$. Par compacité de X on peut extraire de y_n une sous-suite $y_{\psi(n)}$ convergente dans X vers une limite l ; par continuité de f, $f(y_{\psi(n)}) \to f(l)$ quand $n \to +\infty$ et donc $a = f(l)$.
C'est le moment de se souvenir que (x_n) (et donc aussi (y_n) et donc aussi $(y_{\psi(n)})$) tend vers ω dans X/F donc que $\delta(y_{\psi(n)}, F) \to 0$ quand $n \to +\infty$, qu'on peut réécrire $g_F(y_{\psi(n)}) \to 0$. Par continuité de g_F, $g_F(l) = 0$ donc $l \in F$, donc $f(l) = 0$ et on a bien prouvé que $a = 0$.
Comme on l'a dit plus haut, ceci entraîne la convergence de $f(x_n)$ vers 0, c'est-à-dire celle de $\tilde{f}(x_n)$ vers $\tilde{f}(\omega)$, prouvant la continuité de $\tilde{f}$ en ce point.
6) Le fait que $\mathcal{I}_F$ est un idéal est sans difficulté et je n'écris pas le corrigé sur ce point.
Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{C}_b(X, \mathbf{R})$ qu'on suppose convergente dans cet espace vers une fonction f de $\mathcal{C}_b(X, \mathbf{R})$. Supposons tous les f_n éléments de $\mathcal{I}_F$. La convergence uniforme entraînant la convergence simple, pour tout x de F, on peut alors écrire $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Et on a prouvé que $f \in \mathcal{I}_F$. Ce n'est pas plus compliqué que ça !
7) On veillera à ne pas confondre "distincts" et "disjoints" ! Supposons que F_1 et F_2 sont deux fermés distincts. Alors soit $F_1 \not\subset F_2$, soit $F_2 \not\subset F_1$ les deux cas se traitant évidemment symétriquement. Supposons donc qu'on dispose d'un élément x qui appartienne à F_1 sans appartenir à F_2. On remarque alors que la fonction $\mathrm{Arctan} \circ g_{F_2}$, qui est continue comme composée d'applications continues et qui est nulle sur F_2 (donc élément de $\mathcal{I}_{F_2}$) ne s'annule pas en x. Il existe donc un élément de F_1 où cette fonction ne s'annule pas, elle n'est donc pas dans $\mathcal{I}_{F_1}$. Les deux idéaux sont donc distincts.
8) On remarque que $F = \bigcap_{f\in\mathcal{I}} f^{-1}(\{0\})$. C'est donc une intersection de fermés, donc un fermé.
9) C'est très facile, je n'écris pas le corrigé de cette question.
10) a) Tout ce qu'on a à justifier proprement est la continuité de $\tilde{f}$ qui découle de la question 5).
b) Parce qu'on les obtient en faisant $f = 0$.
c) Très facile, pas la peine d'écrire le corrigé de cette question.

d) Soit (g_n) une suite d'éléments de A qu'on suppose converger dans $\mathcal{C}(X/F, \mathbf{R})$ vers une fonction g de $\mathcal{C}(X/F, \mathbf{R})$. Par définition de A on peut donc écrire chaque g_n sous la forme $g_n = \tilde{f}_n + \lambda_n$ pour une $f_n \in \mathcal{I}$ et une constante λ_n. En outre $g_n(\omega) = \lambda_n$: la convergence uniforme de la suite (g_n) qui entraîne la convergence au point ω entraîne donc la convergence de la suite (λ_n) vers le réel $g(\omega)$ que nous noterons λ. Une fois la convergence de (λ_n) prouvée, il est facile (et laissé au lecteur de ce corrigé) de prouver que $(\tilde{f}_n)$ converge aussi dans $\mathcal{C}(X/F, \mathbf{R})$ et d'en déduire que (f_n) converge dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ vers une fonction f, qui est nulle sur F et permet d'écrire $g = \tilde{f} + \lambda$. Par l'hypothèse de fermeture de $\mathcal{I}$, la fonction f est alors elle aussi élément de $\mathcal{I}$ donc la fonction g est bien dans A.
e) * Il est relativement facile de séparer un point $x \neq \omega$ et le point ω. Dès lors que x n'est pas égal à ω il est dans $X \setminus F$ et par définition de F il existe donc une fonction f de $\mathcal{I}$ qui ne s'annule pas en x. La fonction $\tilde{f}$ est alors dans A, ne s'annule pas en x et s'annule en ω ; elle répond donc au cahier des charges.
* Il n'est guère plus difficile quoique plus astucieux de séparer deux points x_1 et x_2 de X/F tous deux distincts de ω. On commence de la même façon par introduire une fonction f_1 de $\mathcal{I}$ qui ne s'annule pas en x_1. La bonne stratégie est ensuite de considérer la fonction $f = g_{\{x_2\}} f_1$. Cette fonction est le produit d'une fonction continue par un élément de $\mathcal{I}$ et est donc elle aussi un élément de $\mathcal{I}$ (car c'est un idéal, c'est là qu'on s'en sert). Elle n'est pas nulle en x_1, comme produit de deux fonctions non nulles en x_1 mais s'annule en x_2. La fonction $\tilde{f}$ est alors un élément de A qui s'annule en x_2 sans s'annuler en x_1 et permet donc de séparer x_1 de x_2.
f) Simple application mécanique de Stone-Weierstrass...
11) C'était bien fait dans les quelques copies qui l'ont fait (coup de flemme en touchant à la fin du corrigé...)
12) L'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini est un idéal, et il n'est pas de la forme $\mathcal{I}_F$ puisqu'il contient des fonctions qui ne s'annulent nulle part, sans pourtant être égal à $\mathcal{I}_\emptyset$ (qui est l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tout entier).